امتحان مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمال للسنة أولى رياضيات – فصل 2016 –2017

السؤال الأول (40د): 1) الطلب الأول-15-:

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \frac{x}{\theta^2}.e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x.e^{-\frac{x}{\theta}}dx\overset{\frac{x}{\theta}=t}{=}\int_0^\infty t.e^{-t}dt=\Gamma(2)=1!=1$$

$$EX=\int_0^\infty x.f(x)dx=\int_0^\infty \frac{x^2}{\theta^2}.e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x^2.e^{-\frac{x}{\theta}}dx\overset{\frac{x}{\theta}=t}{=}\theta\int_0^\infty t^2.e^{-t}dt=\Gamma(3)=2\theta.$$

$$EX^2=\int_0^\infty x^2.f(x)dx=\int_0^\infty \frac{x^3}{\theta^2}.e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x^3.e^{-\frac{x}{\theta}}dx\overset{\frac{x}{\theta}=t}{=}\theta^2\int_0^\infty t^3.e^{-t}dt=\theta.\Gamma(4)=6\theta^2$$

$$\Rightarrow VarX=EX^2-(EX)^2=6\theta^2-4\theta^2=2\theta^2.$$

2) -10-

$$U_X(t)=\int_0^\infty e^{x.t}.f(x)dx=\int_0^\infty e^{x.t}\frac{x}{\theta^2}.e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x.e^{-x\left(\frac{1}{\theta}-t\right)}dx\overset{x\left(\frac{1}{\theta}-t\right)=u}{=}$$

$$=\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^2\int_0^\infty u.e^{-u}du=\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^2\Rightarrow EX=\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{2.\theta}{(1-\theta t)^3}\right|_{t=0}=2.\theta.$$

3) طريقة العزوم-15- $\left.EX\right|_{\theta=\hat\theta}=\overline{X}\Rightarrow 2\hat\theta=\overline{X}\Rightarrow\hat\theta=\frac{\overline{X}}{2}.$ ، ونلاحظ أن:

$$E\hat\theta=E\frac{\overline{X}}{2}=\frac{1}{2}E\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n 2\theta=\frac{n.2\theta}{2n}=\theta.$$

$$Var\,\hat\theta=Var\frac{\overline{X}}{2}=\frac{1}{4}E\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n 2\theta^2=\frac{\theta^2}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

فالتقدير متسق.

الجواب الثاني [30]: 1) بما أنه المتحول منفصل فيجب أن يكون -10-:

$$\sum_{x=0}^\infty p(X=x)=1\Rightarrow\sum_{x=0}^\infty p(X=x)=\sum_{x=0}^\infty p^x.(1-p)=.(1-p)\sum_{x=0}^\infty p^x=(1-p)\frac{1}{1-p}=1$$

$$EX=\sum_{x=0}^\infty x.p(X=x)=\sum_{x=0}^\infty x.p^x.(1-p)=p.(1-p)\sum_{x=0}^\infty x.p^{x-1}=p.(1-p)\left(\sum_{x=0}^\infty p^x\right)'=$$

$$=p.(1-p)\left(\frac{1}{(1-p)^2}\right)=\frac{p}{1-p}.$$

2) الدالة المولدة والتوقع-10-:

الإمتحان
3

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل1 للسنة الأولى رياضيات-16-17-فصل1

الجواب الأول (30- د): 1) سلسلة القوى- 10:-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int\frac{1}{1-x}=-\ln|1-x|\ ;|x|<1\Rightarrow$$

$$x=-1\Rightarrow S_{1-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}:a_{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ a_{n}\geq a_{n+1}$$

$$x=1\Rightarrow S_{1-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty\Rightarrow I_{I}=[-1\,,1[.$$

2) نوع التقارب للسلسلة الثانية - 10 -: بما أن السلسلة متناوبة وتحقق شرطي ليبتنز فهي متقاربة وبما أن:

$S_{4-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=Ch\pi<\infty$ فهي سلسلة متقاربة فالتقارب مطلق. ومن جهة أخرى: $S_{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=\cos\pi=-1$.

3) السلسلة الثالثة - 10 :-

$$S_{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^{n}}{n!}=e^{7},S_{3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}=e-1+2e=3e-1.$$

الجواب الثاني [50 د]:

$$y_{1}=\arcsin(\cos(1-x))+Sh(\ln x)+x^{4}+7^{x},\ \ y_{2}=\begin{cases}2+\sin\frac{(x^{3}-27)\pi}{9.(x^{2}-9)} & ;\ x<3\\ \arctan(2017)+arc\cot(2017) & ;\ x=3\\ \arctan\left[7^{\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\sin(x-3)}}\right] & ;x>3\end{cases}$$

1) معادلة المماس-14-: $y_{1}=\frac{\pi}{2}-1+x+Sh(\ln x)+x^{4}+7^{x}$

$$z_{0}=y_{1}(1)=\frac{\pi}{2}+8,\quad z'=y_{1}'=1+\frac{1}{x}Ch(\ln x)+4x^{3}+7^{x}\ln 7\Rightarrow y_{1}'(1)=6+\ln 49$$

$$\Rightarrow z-8-\frac{\pi}{2}=(6+\ln 49).(x-1)\Rightarrow z=(6+\ln 49).x-\ln 49+2+\frac{\pi}{2}.$$

د. مصطفى حسن

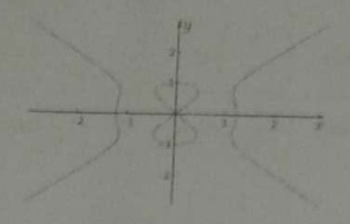
2) استمرار الدالة $y_2(x)$ -20-:الدالة مستمرة لأنها تركيب دوال مستمرة ولكن في النقطة $x=3$ نجد:

$$\lim_{x \to 3} y_2 = 3\ ,\ \lim_{x \to 3} y_2 = \frac{\pi}{4} \neq y_2(3) = \frac{\pi}{2}$$

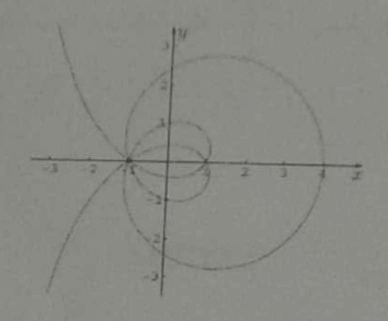
فالدالة مستمرة من اليمين وبما أن كلا النهايتين غير محدودة فنقطة الانقطاع 3 هي من النوع الأول.

3) (8+8=16)د: تعطى المعادلة الديكارتية لمنحني الشيطان بالشكل التالي : $y^4 - x^4 + a.y^2 + b.x^2 = 0$

و يأخذ منحنيه الشكل التالي :



$$x(t) = \frac{a\sin(m+n)t}{\sin(m-n)t},\ y(t) = \frac{2a\sin(m)t.\sin(n)t}{\sin(m-n)t}$$ (منحني البلاتيو)



الجواب الثالث [20 =5+5+10د]:

$$P_1 = \prod_{n=0}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n};\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq 1,\ P_2 = \prod_{n=1}^{\infty}\left[3 - \left(\frac{n^3+1}{7n^3++n+1}\right)\right]a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{20}{7} \neq 1$$

الجداء الأول متباعدان لأنهما لايحققان الشرط اللازم. أما الثالث:

$$P_3 = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$$

لنشكل متتالية الجداءات الجزئية بالشكل : $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ ولكننا نعلم أن :

د. مصطفى حسن

$$\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$

وبالتالي نجد أن متتالية الجداءات الجزئية تصبح بالشكل :

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}=$$

$$=\frac{\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^3}\right)}\cdots\cdots\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\sin x\,\frac{1}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right)=\frac{\sin x}{x}$$

وبما أن متتالية الجداءات الجزئية متقاربة من $\frac{\sin x}{x}$ فإن الجداء متقارب وقيمته $\frac{\sin x}{x}$.

ومنه: $P_3=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

<u>انتهت الأجوبة</u>

د. مصطفى حسن